Algèbres de Lie résolubles réelles algébriquement rigides *

J. M. Ancochea Bermúdez†,[†] R. Campoamor-Stursberg†[‡]
L. García Vergnolle†[§]et M. Goze‡[¶]

† Dpto. Geometría y Topología,
Facultad CC. Matemáticas U.C.M.
Plaza de Ciencias 3, E-28040 Madrid
‡Laboratoire de Mathématiques et Applications,
Université de Haute Alsace
4 rue des Frères Lumière, F-68093 Mulhouse cedex

Résumé

Nous présentons toutes les algèbres de Lie réelles, résolubles et algébriquement rigides de dimension inférieure ou égale à 8. Nous soulignerons les différences qui distinguent cette classification de celle des algèbres complexes résolubles rigides.

Mots clefs : algèbre de Lie, rigide, résoluble.

1 Définitions et propriétés préliminaires

Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle et L_n la variété algébrique des $\mathbb{K}$-algèbres de Lie de dimension n. On dit qu'une $\mathbb{K}$-algèbre

*Le troisième auteur (L. G. V.) remercie la Fundación Ramón Areces qui finance sa bourse prédoctorale.

[†]e-mail: ancochea@mat.ucm.es
[‡]e-mail: rutwig@mat.ucm.es
[§]e-mail: lucigarcia@mat.ucm.es
[¶]e-mail: M.Goze@uha.fr

de Lie $\mathfrak{g}$ est rigide si son orbite dans L_n, sous l'action du groupe $GL(n,\mathbb{K})$, est ouverte. Selon le critère de rigidité de Nijenhuis et Richardson [12], l'annulation du deuxième groupe de cohomologie $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ entraîne la rigidité. La réciproque ne se vérifie pas en général et il existe des contre-exemples pour $\mathbb{K}=\mathbb{C},\mathbb{R}$ et $n>11$. Par contre toute algèbre de Lie rigide sur $\mathbb{C}$ de dimension $n\leq 8$ vérifie $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$.

Soit $\mathfrak{g}$ un algèbre de Lie réelle. Elle est appelée forme réelle d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}'$ si $\mathfrak{g}'$ est isomorphe sur $\mathbb{C}$ à l'algèbre $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Dans ce cas il existe une base de $\mathfrak{g}'$ par rapport à laquelle les constantes de structure sont réelles. Si $\{Y_1,..,Y_n\}$ est une telle base de $\mathfrak{g}'$, alors $[Y_i,Y_j]=C_{ij}^kX_k$ avec $C_{ij}^k\in\mathbb{R}$. L'algèbre de Lie réelle définie par les mêmes constantes de structure est une forme réelle de $\mathfrak{g}'$.

Définition 1 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension n. On appelle tore extérieur de dérivations toute sous-algèbre abélienne dont les éléments sont semi-simples.*

Ceci signifie que les endomorphismes complexes $f\otimes \mathrm{Id}\in End(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ commutent et sont simultanement diagonalisables sur $\mathbb{C}$. On en déduit que tous les tores extérieurs maximaux de $\mathfrak{g}$ ont la même dimension. Cette dimension est le rang de $\mathfrak{g}$.
Dans le cas complexe, le théorème de Mal'cev [11] précise que tous les tores sont conjugés par un automorphisme interne de l'algèbre de Lie. Sur le corps réel ceci n'est plus le cas.

Exemple 1 *Soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_1$ l'algèbre de Heisenberg de dimension 3. Elle est définie par $[X_1,X_2]=X_3$. Soit $f\in Der(\mathfrak{g})$. Alors la matrice de f sur cette base s'écrit :*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

et f est $\mathbb{C}$-diagonalisable si et seulement si le mineur

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Ainsi le tore complexe est engendré par

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \; et \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

Dans le cas réel on a les tores suivantes :

$$\mathfrak{t}_1 = \mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right\},$$
$$\mathfrak{t}_2 = \mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \tag{1}$$

et ces deux tores ne sont pas conjugés par rapport à $Aut(\mathfrak{h}_1)$. Notons que si $\mathfrak{g}$ est réelle de rang non nul le nombre de classes d'automorphisme des tores est fini et c'est un invariant de $\mathfrak{g}$. On appellera ce nombre *l'indice toroïdal* de $\mathfrak{g}$. Ici il vaut 2, et plus généralement pour l'algèbre de Heisenberg réelle $\mathfrak{h}_p$ il vaut $p+1$.

Notons enfin que si l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}'$ admet une forme réelle $\mathfrak{g}$, alors
$$\dim_{\mathbb{R}} H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{C}} H^2(\mathfrak{g}',\mathfrak{g}').$$
En effet, si $\{X_1,..,X_n\}$ est une base de $\mathfrak{g}$, les constantes de structure de $\mathfrak{g}'$ sur la base $\{Y_i := X_i \otimes 1, 1 \leq i \leq n\}$ sont égales à ceux de $\mathfrak{g}$. Il s'en suit que le système linéaire définissant les cocycles (et les cobords) de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ ont le même rang.

Définition 2 *Une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ est dite algébriquement rigide si*

$$\dim_{\mathbb{R}} H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = 0.$$

On en déduit que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ est algébriquement rigide.

Conséquence 1 *Si* $\dim \mathfrak{g} \leq 8$*, alors $\mathfrak{g}$ est rigide si et seulement elle est algébriquement rigide.*

Le problème qui se pose alors est de savoir s'il existe des formes réelles $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ non isomorphes d'une algèbre de Lie rigide complexe qui soient toutes les deux rigides. L'exemple suivant montre que cette situation apparaît dès la dimension 4.

2 Exemples

2.1 Dimension 4

Soit $\mathfrak{a}_2$ l'algèbre de Lie abélienne réelle de dimension 2. Elle admet deux tores non conjugés :

$$\mathfrak{t}_1 = \mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{t}_2 = \mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}. \tag{3}$$

Soit $\mathfrak{g}_1$ l'algèbre de Lie résoluble définie par l'extension de $\mathfrak{a}_2$ par $\mathfrak{t}_1$: $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$. Les constantes de structure sont données par

$$[X_1, Y_1] = Y_1, \quad [X_1, Y_2] = 0, \quad [X_2, Y_1] = 0, \quad [X_2, Y_2] = Y_2. \tag{4}$$

Elle est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{r}_2^2$ [10].
Soit $\mathfrak{g}_2$ l'extension de $\mathfrak{a}_2$ par $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{t}_2 \oplus \mathfrak{a}_2$. Dans ce cas, les constantes de structure sont données par

$$[X_1, Y_1] = Y_1, \quad [X_1, Y_2] = Y_2, \quad [X_2, Y_1] = Y_2, \quad [X_2, Y_2] = -Y_1. \tag{5}$$

Les deux algèbres sont algébriquement rigides et non isomorphes. Elles admettent comme algèbre complexifiée $\mathfrak{r}_2^2$.

2.2 Dimension 5

Soit $\mathcal{N}_{5,3}$ l'algèbre de Lie nilpotente réelle de dimension 5 définie par :

$$[Y_1, Y_2] = Y_3, \quad [Y_1, Y_3] = Y_4, \quad [Y_2, Y_3] = Y_5.$$

Par rapport à cette base, les dérivations extérieures s'écrivent comme

$$\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1^1 + f_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_2^4 & 0 & 2f_1^1 + f_2^2 & f_2^1 \\ f_1^5 & f_2^5 & 0 & f_1^2 & f_1^1 + 2f_2^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Le tore de $\mathcal{N}_{5,3} \otimes \mathbb{C}$ est de dimension 2 et l'indice toroïdal de $\mathcal{N}_{5,3}$ est égal à 2. En effet, elle admet les deux tores suivantes qui ne sont pas conjugés :

1. le tore $\mathfrak{t}_1$ est engendré par deux dérivations diagonales :

$$\mathfrak{t}_1 = \mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} \tag{7}$$

2. Le tore $\mathfrak{t}_2$ est engendré par

$$\mathfrak{t}_2 = \mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{8}$$

Comme les matrices $\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2f_1^1 + f_2^2 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_1^1 + 2f_2^2 \end{pmatrix}$ ont le même polynôme caractéristique, elles admettent les mêmes valeurs propres. On en déduit que $\mathfrak{t}_1$ et $\mathfrak{t}_2$ sont les seuls tores à conjugaison près. Considérons les deux algèbres réelles de dimension 7

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= \mathfrak{t}_1 \otimes \mathcal{N}_{5,3}, \\ \mathfrak{g}_2 &= \mathfrak{t}_2 \otimes \mathcal{N}_{5,3}. \end{aligned}$$

Elles sont algébriquement rigides et non isomorphes dans $\mathbb{R}$. Les constantes de structure de $\mathfrak{g}_2$ sont données par :

$$\begin{array}{llll} [X_1, X_2] = X_3, & [X_1, X_3] = X_4, & [X_2, X_3] = X_5, & [Y, X_1] = -X_2, \\ [Y, X_2] = X_1, & [Y, X_4] = -X_5, & [Y, X_5] = X_4, & [Z, X_1] = X_1, \\ [Z, X_2] = X_2, & [Z, X_3] = 2X_3, & [Z, X_4] = 3X_4, & [Z, X_5] = 3X_5. \end{array} \tag{9}$$

Ces deux exemples nous montrent le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente de rang non nul k et d'indice toroïdal p. Alors, si $\mathfrak{t}_1, .., \mathfrak{t}_p$ sont les tores non conjugés par rapport au groupe $Aut(\mathfrak{n})$ les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_i := \mathfrak{t}_i \oplus \mathfrak{n}$ sont non isomorphes. Si $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g}_i \oplus \mathbb{C}$ est algèbriquement rigide, les algèbres réelles $\mathfrak{g}_i$ sont algèbriquement rigides et non isomorphes. Ce sont les seules, à isomorphisme près, ayant $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ comme algèbre complexifiée.*

Conséquence 2 *Le théorème de décomposabilité de Carles [6] n'est plus valable pour les algèbres de Lie rigides réelles. Rappelons que cet résultat dit que toute algèbre de Lie rigide est la somme semi-directe du nilradical*[1] *et un tore extérieur formée par des éléments diagonalisables.*

3 La classification réelle jusqu'à dimension 8

Les exemples ci-dessus montrent que les classifications réelle et complexe diffèrent. Nous pouvons pour chacune des algèbres nilpotentes réelles de dimension 5 reprendre la preuve précedente. Dans ce paragraphe nous proposons la classification des algèbres de Lie réelles résolubles rigides de dimension $n \leq 8$ en se basant d'une part sur la classification complexe [10], et d'autre part sur la classification des algèbres de Lie réelles nilpotentes de dimension $m \leq 6$ [7, 13].

Lemme 1 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble réelle algébriquement rigide de dimension 8 dont le tore contient au moins une dérivation non-diagonalisable. Alors le nilradical $\mathfrak{n}$ est de dimension $m \leq 6$.*

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{g}$ soit de rang 1, c'est-à-dire, $\dim \mathfrak{n} = 7$. Alors l'espace complémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$ est de dimension 1, donc engendré par un vecteur X tel que l'opérateur adjoint $ad\,(X)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. D'après [1], pour toute algèbre de Lie résoluble complexe rigide, il existe une base du tore extérieur $\mathfrak{t}$ telle que les valeurs propres des opérateurs adjoints sont entières. On en déduit l'existence d'un vecteur Y, tel que $X = \lambda Y$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et la forme canonique est $\mathrm{diag}(n_1, \ldots, n_7, 0)$, où $n_1, \ldots, n_7 \in \mathbb{Z}$. De plus, les valeurs propres sont non nulles d'après [10]. L'opérateur $ad(X)$ n'étant diagonalisable que sur le corps complexe implique que l'existence d'une suite de nombres entiers $\{n_1, .., n_7\}$ et la partie réelle de λ est nulle. Alors $ad\,(X) = \mathrm{diag}(\lambda n_1, \ldots, \lambda n_7, 0)$ sur $\mathbb{C}$. Des propriétés des polynômes à coefficients réels d'ordre impair on déduit que λn_i et $\bar{\lambda} n_i$ sont des valeurs propres de $ad\,(X)$, d'où $ad(X) = \mathrm{diag}(\lambda n_1, \bar{\lambda} n_1, \lambda n_2, \bar{\lambda} n_2, \lambda n_3, \bar{\lambda} n_3, \lambda n_4, \bar{\lambda} n_4)$. Ceci implique qu'il existe au moins un $\lambda n_i = 0$, d'où la contradiction. ■

D'après le lemme le problème est alors réduit à déterminer les formes réelles des algèbres de Lie rigides complexes.

[1] C'est-à-dire, le idéal nilpotent maximal

Proposition 1 *Toute algèbre de Lie rigide réelle de dimension* $n \leq 8$ *possedant au moins une dérivation non diagonale est isomorphe à une des algèbres suivantes :*

- *Dimension 4 :*

$$\mathfrak{g}_4^2 : \quad [X_1, X_3] = X_2, \quad [X_3, X_2] = X_1, \quad [X_4, X_1] = X_1, \quad [X_4, X_2] = X_2.$$

- *Dimension 5 :*

$$\mathfrak{g}_5^2 : \quad \begin{array}{llll} [X_1, X_2] = X_3, & [X_4, X_1] = X_1, & [X_4, X_2] = X_2, & [X_4, X_3] = 2X_3, \\ [X_5, X_1] = -X_2, & [X_5, X_2] = X_1. & & \end{array}$$

- *Dimension 6 :*

$$\mathfrak{g}_6^4 : \quad \begin{array}{llll} [X_1, X_3] = X_2, & [X_3, X_2] = X_1, & [X_4, X_1] = X_1, & [X_4, X_2] = X_2, \\ [X_5, X_6] = X_5. & & & \end{array}$$

- *Dimension 7 :*

$$\mathfrak{g}_7^9 : \quad \begin{array}{llll} [X_1, X_2] = X_3, & [X_1, X_3] = X_4, & [X_2, X_3] = X_4\,, & [X_6, X_1] = -X_2, \\ [X_6, X_2] = X_1, & [X_6, X_4] = -X_5, & [X_6, X_5] = X_4, & [X_7, X_1] = X_1, \\ [X_7, X_2] = X_2, & [X_7, X_3] = 2X_3, & [X_7, X_4] = 3X_4, & [X_7, X_5] = 3X_5. \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_7^{10} : \quad \begin{array}{llll} [X_5, X_1] = X_1, & [X_5, X_2] = X_2, & [X_5, X_3] = 2X_3, & [X_6, X_1] = -X_2, \\ [X_6, X_2] = X_1, & [X_7, X_4] = X_4, & & . \end{array}$$

- *Dimension 8 :*

$$\mathfrak{g}_8^{34} : \quad \begin{array}{llll} [X_1, X_3] = X_2, & [X_3, X_2] = X_1, & [X_4, X_1] = X_1, & [X_4, X_2] = X_2, \\ [X_5, X_7] = X_6, & [X_7, X_6] = X_5, & [X_8, X_5] = X_5, & [X_8, X_6] = X_6. \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_8^{35} : \quad \begin{array}{llll} [X_1, X_3] = X_2, & [X_3, X_2] = X_1, & [X_4, X_1] = X_1, & [X_4, X_2] = X_2, \\ [X_5, X_6] = X_6, & [X_7, X_8] = X_8. & & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_8^{36} : \quad \begin{array}{llll} [X_1, X_2] = X_4, & [X_1, X_3] = X_5, & [X_6, X_i] = X_i & (i = 1, 4, 5)\,, \\ [X_7, X_2] = -X_3, & [X_7, X_3] = X_2, & [X_7, X_4] = -X_5, & [X_7, X_5] = X_4, \\ [X_8, X_i] = X_i & (i = 2, 3, 4, 5)\,. & & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_8^{37} : \quad \begin{array}{llll} [X_1, X_2] = X_5, & [X_3, X_4] = X_5, & [X_6, X_i] = X_i & (i = 1, 2)\,, \\ [X_6, X_5] = 2X_5, & [X_7, X_1] = -X_2, & [X_7, X_2] = X_1, & [X_8, X_3] = -X_4, \\ [X_8, X_4] = X_3\,. & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{g}_8^{38}: & [X_1,X_2]=X_5, \quad [X_3,X_4]=X_5, \quad [X_6,X_i]=X_i \qquad (i=1,2)\,,\\
& [X_6,X_5]=2X_5, \quad [X_7,X_1]=X_1, \quad [X_7,X_2]=-X_2, \quad [X_8,X_3]=-X_4,\\
& [X_8,X_4]=X_3\,.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{g}_8^{39}: & [X_1,X_i]=X_{i+1}, \quad (2\le i\le 4)\,, \quad [X_3,X_2]=X_6, \quad [X_6,X_2]=X_5,\\
& [X_7,X_1]=X_1, \quad [X_7,X_2]=X_2, \quad [X_7,X_3]=2X_3, \quad [X_7,X_4]=3X_4,\\
& [X_7,X_5]=4X_5, \quad [X_7,X_6]=3X_6, \quad [X_8,X_1]=X_2, \quad [X_8,X_2]=-X_1,\\
& [X_8,X_4]=-X_6, \quad [X_8,X_6]=X_4.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{g}_8^{40}: & [X_1,X_i]=X_{i+2}, \quad (2\le i\le 4)\,, \quad [X_2,X_3]=X_6, \quad [X_4,X_2]=X_5,\\
& [X_7,X_1]=X_1, \quad [X_7,X_2]=X_2, \quad [X_7,X_3]=2X_3, \quad [X_7,X_4]=2X_4,\\
& [X_7,X_5]=3X_5, \quad [X_7,X_6]=3X_6, \quad [X_8,X_1]=X_2, \quad [X_8,X_2]=-X_1,\\
& [X_8,X_5]=X_6, \quad [X_8,X_6]=-X_5.
\end{array}$$

De plus, les algèbres sont deux-à-deux non isomorphes.

Théorème 2 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle, résoluble et algébriquement rigide de dimension inférieure ou égale à 8. Alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'une des algèbres $\mathfrak{g}_i^j$ décrites par les lois μ_i^j de la liste [10] (celles ci sont les formes réelles obtenues par restriction des scalaires des algèbres complexes résolubles rigides de dimension inférieure ou égale à 8) ou bien à l'une des algèbres du lemme précédent. De plus, toutes ces algèbres sont deux-à-deux non isomorphes.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre vérifiant les hypothèses du théorème. Si la dimension du niradical est inférieure ou égale à 6, les algèbres possédant des dérivations non diagonalisables sont données par le lemme précédent, et ceux ayant un tore formé par des dérivations diagonalisables sont classifiées dans [10]. Si la dimension du niradical est égale à 7, alors nécessairement $\dim \mathfrak{g}=8$ et le tore est engendré par une seule dérivation f. D'après le lemme ci-dessus, f est diagonale et donc $\mathfrak{g}$ est obtenue par restriction des scalaires des algèbres complexes de la liste [10] qui ont un nilradical de dimension 7. ■

De la théorie générale de la rigidité sur le corps complexe on déduit que toute algèbre de Lie résoluble rigide est determinée de façon biunivoque par son nilradical, et par conséquent par le système de racines [1]. Par contre, dans le cas réel le nilradical ne détermine pas la structure du tore. La table suivante donne les algèbres de Lie réelles rigides non isomorphes de dimension $n\le 8$ qui s'appuient sur un nilradical donné. On appelera forme normale à l'algèbre de Lie réelle obtenue par réstriction des scalaires de l'algèbre complexe de la classification dans [10].

Tab. 1 – Algèbres de Lie réeles rigides ayant le même nilradical.

Dimension	Nilradical	Formes réelles
4	abélien	$\mathfrak{g}_4^1$ (forme normale) $\mathfrak{g}_4^2$
5	$\mathcal{N}_3 = \mathfrak{h}_1$	$\mathfrak{g}_5^1$ (forme normale) $\mathfrak{g}_5^2$
6	abélien	$\mathfrak{g}_6^3$ (forme normale) $\mathfrak{g}_6^4$
7	$\mathcal{N}_3 \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{g}_7^8$ (forme normale) $\mathfrak{g}_7^{10}$
	$\mathcal{N}_{5,3}$	$\mathfrak{g}_7^6$ (forme normale) $\mathfrak{g}_7^9$
8	abélien	$\mathfrak{g}_8^{33} \simeq \mathfrak{g}_2^1 \oplus \mathfrak{g}_2^1 \oplus \mathfrak{g}_2^1 \oplus \mathfrak{g}_2^1$ (forme normale) $\mathfrak{g}_8^{34}$ $\mathfrak{g}_8^{35}$
	$\mathcal{N}_{5,5}$	$\mathfrak{g}_8^{31}$ (forme normale) $\mathfrak{g}_8^{36}$
	$\mathcal{N}_{5,6} = \mathfrak{h}_2$	$\mathfrak{g}_8^{32}$ (forme normale) $\mathfrak{g}_8^{37}$ $\mathfrak{g}_8^{38}$
	$\mathcal{N}_{6,6}$	$\mathfrak{g}_8^{22}$ (forme normale) $\mathfrak{g}_8^{39}$
	$\mathcal{N}_{6,14}$	$\mathfrak{g}_8^{29}$ (forme normale) $\mathfrak{g}_8^{40}$

La raison de l'existence des algèbres rigides réelles s'appuyant sur le même nilradical est une conséquence de l'invalidité du théorème de décomposabilité, et plus précisement, de l'existence de dérivations extérieures non diagonalisables. Par conséquence, le nombre des algèbres de Lie réelles rigides ayant le même nilradical est donné précisement par l'indice toroîdal défini dans la première section.

Exemple 2 *L'algèbre de Heisenberg* $\mathfrak{h}_n$ *est définie par les crochets*

$$[X_{2i-1}, X_{2i}] = X_{2n+1} \quad i = 1, \ldots, n$$

Sur le corps complexe, il n'existe qu'une algèbre $\mathfrak{g}_{3n+2}$ *rigide ayant* $\mathfrak{h}_n$ *pour nilradical, donnée par le tore de dimension* $n+1$ *engendré par* $\{Y_1, .., Y_{n+1}\}$ *:*

$$\begin{array}{lll} [Y_i, X_{2i-1}] = X_{2i-1}, & [Y_i, X_{2i}] = -X_{2i}, & 1 \leq i \leq n \\ [Y_{n+1}, X_i] = X_i, & [Y_{n+1}, X_{2n+1}] = 2X_{2n+1}, & 1 \leq i \leq 2n. \end{array}$$

Les formes réelles de $\mathfrak{g}_{3n+2}$*, que nous dénotons par* $\mathfrak{g}_{3n+2,k}$ *(où* $0 \leq k \leq n$*) sont données par :*

$$\begin{array}{lll} [X_{2i-1}, X_{2i}] = X_{2n+1}, & & 1 \leq i \leq n \\ [Y_i, X_{2i-1}] = X_{2i}, & [Y_i, X_{2i}] = -X_{2i-1}, & 1 \leq i \leq k \\ [Y_i, X_{2i-1}] = X_{2i-1}, & [Y_i, X_{2i}] = -X_{2i}, & k+1 \leq i \leq n+1 \\ [Y_{n+1}, X_i] = X_i, & [Y_{n+1}, X_{2n+1}] = 2X_{2n+1} & 1 \leq i \leq 2n. \end{array}$$

En particulier, la forme réelle $\mathfrak{g}_{3n+2,k}$ *possède* k *dérivations non diagonalisables. Ça montre que l'indice toroïdal est égale a* $p+1$*. Cette étude nous conduit à emettre la conjecture suivante :*

Conjecture 1 *Toute algèbre de Lie réelle résoluble rigide possède au moins une dérivation diagonale.*

Remarques finales

Dans [3, 5] on montre que les systèmes des poids des algèbres de Lie nilpotentes [9] peuvent être décrits par des critères combinatoires. En particulier, on montre que toute algèbre de Lie rigide complexe dont l'indice de résolubilité est deux est décomposable. L'exemple en dimension 4 vu dans 2.1 montre que cette propriété ne s'étend pas au cas réel. Ceci signifie que la

notion de graphe des poids doît être modifiée pour couvrir la classification des rigides réelles. Une autre propriété caractéristique du cas complexe concerne la résolubilité complète des algèbres rigides. Rappelons qu'une algèbre de Lie est dite complétement résoluble [8] s'il existe une suite décroissante d'idéaux

$$\mathfrak{g} = I_0 \supset I_1 \supset \ldots I_{n-1} \supset I_n = 0$$

telle que $\dim_{\mathbb{K}} I_k/I_{k+1} = 1$ pour tout $k = 0,..,n-1$. Sur le corps $\mathbb{C}$, la résolubilité et la résolubilité complète sont equivalentes. Par contre, sur $\mathbb{R}$, on peut seulement dire que la résolubilité complète implique la résolubilité, la réciproque étant fausse en général. D'ailleurs, si $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble rigide complexe alors seulement la forme réelle obtenue par restriction des scalaires (le tenseur de structure étant rationnel) est complètement résoluble.

Références

[1] J. M. Ancochea, M. Goze, Le rang du système linéaire des racines d'une algèbre de Lie rigide résoluble complexe, Comm. Algebra 20 (1992), 875-887.

[2] J. M. Ancochea, M. Goze, On the nonrationality of rigid Lie algebras, Proc. Am. Math. Soc. **127** (1999), 2611-2618.

[3] J. M. Ancochea, R. Campoamor-Stursberg. 2-step solvable Lie algebras and weight graphs, Transf. Groups **7** (2002), 307-320.

[4] R. Campoamor-Stursberg. Invariants of solvable rigid Lie algebras up to dimension 8, J. Phys. A : Math. Gen. **35** (2002), 6293-6306.

[5] R. Campoamor-Stursberg. A graph theoretical determination of solvable complete rigid Lie algebras, Linear Alg. Appl. **372** (2003), 53-66.

[6] R. Carles, Sur la structure des algèbres de Lie rigides, Ann. Inst. Fourier 34 (1984), 65-82.

[7] A. Cerezo, Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6, Prépublications Université de Nice, 1983.

[8] J. Dixmier. Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[9] G. Favre, Système des poids sur une algèbre de Lie nilpotente, Manuscripta Math. **9** (1973), 53-90.

[10] M. Goze, J. M. Ancochea, On the classification of rigid Lie algebras, J. Algebra 245 (2001), 68-91.

[11] A. I. Mal'cev, Solvable Lie algebras, Izv. Akad. Nauk SSSR 9 (1945), 329-356.

[12] A. Nijenhuis, R. W. Richardson, Deformations of Lie algebra structures. J. Math. Mech. 17 1967 89-105.

[13] M. Vergne, Variété des algèbres de Lie nilpotentes, Thèse 3ème cycle, Paris 1966.